УДК 373,5,016;514

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ ЦИЛІНДР ТА КОНУС В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Салов Володимир Сергійович

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики Волков Ю. І.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Анотація. *У статті розглянуто методичні особливості розв'язування стереометричних задач на тіла обертання; розглянуто задачі, у яких досліджені цилиндр конус та зрізаний конус. Розв'язування таких задач у старшій школі сприяє поглибленню знань школярів з геометрії і може бути використане для підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання та у позакласній роботі. Учні повинні володіти поняттями про тіла і поверхні обертання, зображувати їх і застосовувати властивості для розв'язування задач.*

Ключові слова: *стереометрія, тіла обертання, циліндр, конус,зрізаний конус.*

Methods of studying the subject of cylinder and cone in the school course of geometry

Salov Volodymyr Serhiyovych

Scientific supervisor: Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematics VolkovY. I.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

Abstract. *The article deals with the methodological features of solving stereometric problems on rotation bodies; The problems of cone cylinder and truncated cone are examined. Solving these tasks in high school helps to increase students' knowledge of geometry and can be used to prepare students for external independent assessment and in extracurricular work. Students should be familiar with the concepts of bodies and surfaces of rotation, depict them, and apply properties to solve problems.*

Keywords: *stereometry, body of rotation, cylinder, cone, truncated cone.*

Постановка проблеми. Для людини важливою є здатність бути мобільною та швидко зорієнтуватися, вміти бачити проблему, чітко формулювати, всебічно підходити до її розв'язування, здобувати необхідну інформацію тощо. Вивчення геометрії сприяє розвитку цих якостей, оскільки основними завданнями навчання геометрії в школі є розвиток образного, зокрема просторового, мислення; розвиток логічного мислення; формування розуміння відношень між геометричними об’єктами та об’єктами реального світу, вміння застосовувати геометрію для розв’язування практичних задач.

Тема даної статті зумовлюється тим, що для учнів найскладнішими є стереометричні задачі взагалі і особливо – стереометричні задачі, пов’язані із тілами обертання. Про це свідчить аналіз діагностичних тестових та контрольних робіт, підсумки зовнішнього незалежного оцінювання з математики, які стверджують, що значна кількість учнів навіть не намагаються розв’язати стереометричні задачі.

Аналіз досліджень і публікацій. Різні аспекти методики навчання стереометрії у школі розкриті у працях Г. П. Бевза, М. Я. Ігнатенка, А. П. Кисельова, Н. В. Кульчицької, О. В. Погорєлова, В. А. Сверчевської, Н. А. Тарасенкової та ін.

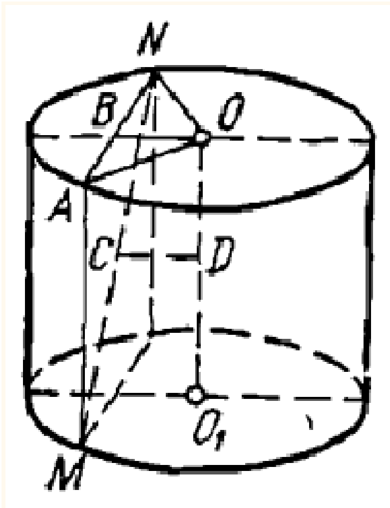
Метою роботи є аналіз стереометричних задач на тіла обертання.

Виклад основного матеріалу. Протягом усього свого існування людство не перестає поповнювати свої наукові знання в тій чи іншій галузі. Не тільки багато вчених, а й простих людей, цікавилися тілами обертання. Багато реальних об'єктів у живій природі, фізиці, астрономії, географії та інших природничих науках мають форму кулі, сфери, циліндра та конуса. В наш час часто виникає практична необхідність визначати об’єм і площу поверхні об’єктів природи, побуту, виробництва, досліджувати їх розміри, взаємне розташування і т.п. З погляду на це, процес навчання стереометрії, зокрема вивчення тіл обертання, потрібно найперше розглядати комплексно, як надбання учнями необхідних загальнолюдських знань і цінностей, а тому спрямувати на розвиток навчально-пізнавальної та творчої активності учнів і на забезпечення їх потреб та основ життєдіяльності.

Стереометрія – розділ геометрії, предметом якого є вивчення просторових геометричних фігур. Теоретичний матеріал, що стосується тіл обертання, не великий за обсягом і засвоюється учнями без особливих труднощів. Досвід показує, що циліндр і конус доцільно вивчати за одним методичним планом, підкреслюючи спільне і відмінне в означеннях, властивостях, зображеннях. Учні повинні володіти поняттями про тіла і поверхні обертання, зображувати їх і застосовувати властивості для розв'язування задач.

Наприклад:

Задача 1. Висота циліндра – 6 дм, радіус основи – 5 дм. Кінці даного відрізка лежать на кола обох основ; довжина його дрівнює 10 дм. Знайти найкоротшу відстань між даним відрізком і віссю.



Розв'язання:

У даному циліндрі $AM = 6$ дм, $AO = 5$ дм і відрізок $MN = 10$ см.

Знайти відстань між відрізком MN і віссю циліндра OO_1.

MN і OO_1 – мимобіжні прямі. Проведемо площину MAN через пряму MN паралельно до осі OO_{11}; тоді віддаль від будь-якої точки осі OO_1 до проведеної площини буде шуканою. З прямокутного $\triangle MAN$ дістанемо:

$AN = \sqrt{MN^2 - AM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (дм)

З прямокутного трикутника ⊿ABO

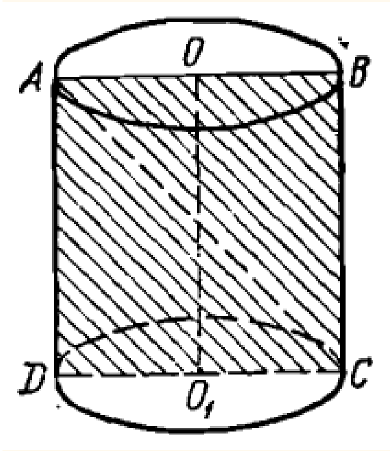
$$(BO \perp AN; AB = \frac{AN}{2})$$

$$OB = \sqrt{AO^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3(\text{дм})$$

У цьому випадку $CD = BO = 3$дм.

Відповідь: 3 дм.

Задача 2. В циліндрі площина основи дорівнює Q, а площа осьового перерізу S. Визначити повну поверхню циліндра.



Розв'язання:

В циліндрі

$$S_{\text{осн}} = Q \text{ і } S_{ABCD} = S$$

Знайти $S_{\text{повн}}$ циліндра

Позначимо $AO = R$ і $AD = H$, тоді

$$S_{\text{повн}} = 2\pi R(H + R).$$

За умовою задачі

$$2RH = S,\ \pi R2 = Q,$$

звідки

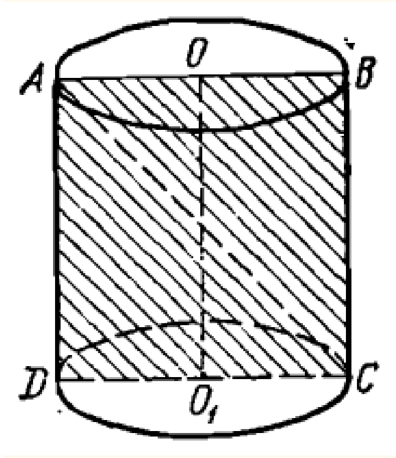
$$R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}};H = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}}.$$

Тоді

$$S_{\text{повн}} = 2\pi\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\left(\frac{S}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}} + \sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right) = \pi S + 2Q.$$

Відповідь: $\pi S + 2Q$

Задача 3. Бічна поверхня циліндра вдвічі більша за суму площ його основ. Знайти кут між діагоналлю осьового перерізу і площиною основи циліндра.



Розв'язання:

За умовою задачі $S_{\text{бічн}} = 4S_{\text{осн}}$.

Знайти $\angle ACD = \alpha$.

Відомо, що $S_{\text{бічн}} = 2\pi RH$, а $S_{\text{осн}} = \pi R^2$, тоді $2\pi RH = 4\pi R^2$ і, отже, $H = 2R$,

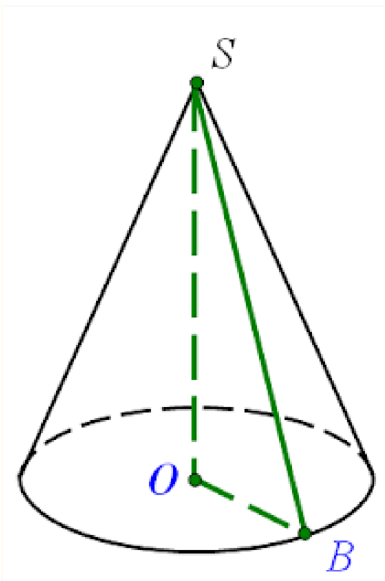
Тобто прямокутний ΔADC – рівнобедрений,

$$AD = DC = 2R.$$

Шуканий кут $\alpha = 45°$.

Відповідь: $45°$

Задача 4. Кут між висотою і твірною конуса $60°$, висота конуса – H. Знайти площу перерізу, проведеного через дві взаємно перпендикулярні твірні.



Розв'язання:

Нехай кут між висотою і твірною конуса $OSB = 60°$, висота $SO = H$.

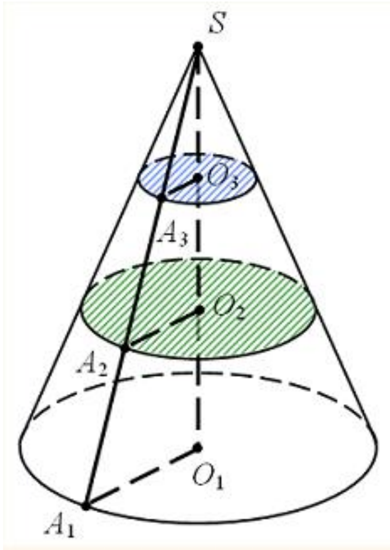
Нехай існують дві взаємно перпендикулярні твірні, тоді площа цього перерізу буде знаходитись як півдобуток твірних.

$$\Delta OSB, SB = \frac{SO}{cos60^{\circ}} = \frac{H}{\frac{1}{2}} = 2H$$

$S = \frac{1}{2}(2H)^2 = 2H^2$.

Відповідь: $2H^2$

Задача 5. В конусі проведено два перерізи, паралельні основі, які ділять висоту конуса на три рівні частини. Знайти відношення їх площ.



Розв'язання:

Проведемо два перерізи в конусі, паралельно основі, причому так, що центри цих кіл O_2і O_3 ділять висоту конуса на три рівні частини.

Тоді радіус круга з центром O_2 дорівнює

$$A_2O_2 = \frac{2}{3}A_1O_1.$$

а радіус круга з центром O_3

$$A_3O_3 = \frac{1}{3}A_1O_1,$$

це випливає з подібності трикутників

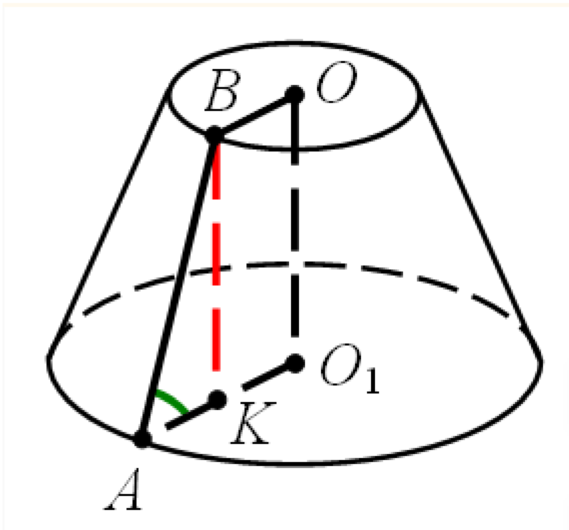
$$A_1SO_1, A_2SO_2, A_3SO_3,$$

Тоді позначивши площі перерізів S_2 і S_2 маємо:

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{\pi A_2 O_2^2}{\pi A_3 O_3^2} = \frac{A_2 O_2^2}{A_3 O_3^2} = \frac{\frac{4}{9} A_1 O_1^2}{\frac{1}{9} A_1 O_1^2} = \frac{1}{4}.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

Задача 6. Твірна зрізаного конуса дорівнює $2a$ і нахилена до основи піл кутом $60°$. Радіус однієї основи вдвічі більше радіуса другої основи. Знайти кожний радіус.



Розв'язання:

Нехай твірна зрізаного конуса $AB = 2a$, а кут нахилу твірної до площини основи конуса $\angle BAO_1 = 60°$.

Користуючись умовою $AO_1 = 2BO$, Опустимо з точки B в площину нижньої основи перпендикуляр

$BK \perp AO_1$ тоді $BO = KO_1 = AK$.

З ΔABK $AK = AB \cos\angle BAK$

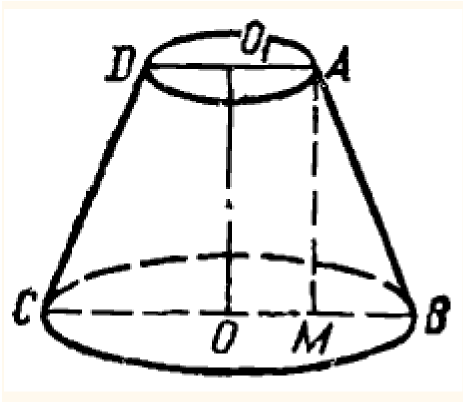
$AK = 2a \cos 60° = a$.

Тоді

$AK = KO_1 = BO = a$, $AO_1 = 2a$.

Відповідь: $a, 2a$.

Задача 7. Визначити бічну поверхню зрізаного конуса, якщо його твірна утворює з площиною основи кут $60°$, а площа осьового перерізу дорівнює S.



Нехай дано зрізаний конус CA з площею осьового перерізу S і $\angle ABO = 60°$. Знайти бічну поверхню S_x зрізаного конуса.

У рівнобічній трапеції BAC з вершини A на основу CB опустимо $AM \perp CB$. Позначимо $AB = L, OB = R, O_1A = r$. У прямокутному ΔAMB за умовою $\angle MAB = 30°$, тому

$$MB = \frac{1}{2}L; AM = H = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$

За умовою задачі площа осьового перерізу

$$(R + r)H = S,$$

або

$$\frac{\sqrt{3}}{2}L(R + r) = S$$

Помноживши обидві частини останньої рівності на число π, одержимо

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi L(R + r) = \pi S$$

Враховуючи, що бічна поверхня зрізаного конуса

$$S_x = \pi L(R + r).$$

знаходимо

$$\frac{\sqrt{3}}{2}S_x = \pi S.$$

Відповідь: $S_x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi S(\text{кв. од.})$.

Висновки. Справжнє засвоєння стереометрії, починається тільки із розв’язування задач. Велике значення має систематичне розв’язування задач, бо найбільші труднощі, які виникають при розв’язуванні задач зі стереометрії – це, крім знань з планіметрії і стереометрії, вміння застосовувати різноманітні прийоми пошуку рішення та поєднувати в процесі розв’язування однієї задачі різні математичні методи. Наведені приклади – це частина задач з шкільного курсу стереометрії і вчитель зможе внести корективи у викладений матеріал в залежності від підготовки учнів, їх здібностей і інтересів.

Розглянутий матеріал корисно використати для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

Список використаної літератури

1. Слєпкань З. І. Методика навчання математики / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 510 с.
2. Стереометрія у старшій школі: посіб. для вчителя / Я.С. Бродський, В.Ю. Грек, О.Л. Павлов [та ін.]. – Т.: Богдан, 2005. – 404 с.
3. Математка 11кл.: підруч.для загальноосвіт.навч.закл.: рівень стандарту / Г.П. Бевз, В.Г.Бевз. – К.: Генеза, 2011. – 319 с.